

Stopa zwrotu pozbawiona ryzyka

Do estymacji stopy zwrotu pozbawionej ryzyka używa się bonów skarbowych (uznaje się, że w krótkich okresach, np. 13 tygodni, są one bezryzykowne), bądź prognoz dotyczących przyszłych stóp procentowych NBP i przyszłej inflacji. Najczęściej jednak używa się w tym celu krajowego rynku obligacji skarbowych – są one bardziej stabilne i uwzględniają inflację w dłuższym okresie. Zwykle wykorzystuje się dochodowość 5-cioletnich, bądź 10-cioletnich obligacji skarbowych.

Jeżeli interesuje nas okres historyczny (np. 5 lat) o T podokresach historycznych (np. rocznych, bądź miesięcznych), to średnia historyczna stopa zwrotu pozbawiona ryzyka w tym okresie historycznym jest dana wzorem

$$\bar{\mu}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mu_{0,t},$$

gdzie $\mu_{0,t}$ jest stopą zwrotu pozbawioną ryzyka w podokresie historycznym o numerze t ($t = 1, \dots, T$).

Wskaźnik Sharpe'a

Wskaźnik Sharpe'a (Sharpe ratio, Sharpe index) został wprowadzony w 1966r. przez Williama Forsytha Sharpe'a - ekonomistę amerykańskiego, laureata (wspólnie z H. M. Markowiczem i M. H. Millerem) Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii w 1990r. Jest to podstawowa miara efektywności w zarządzaniu (*performance measure*), skorygowana (w odróżnieniu od samej stopy zwrotu) o ryzyko. Wskaźnik Sharpe'a jest wskaźnikiem ex-post (historycznym). Jest to względna oczekiwana premia za ryzyko. Dokładniej mówiąc jest to stosunek oczekiwanej premii za ryzyko podjęcia niepewnej inwestycji (czyli różnicy oczekiwanej stopy zwrotu tej inwestycji i stopy zwrotu waloru bezryzykownego) do ryzyka tej inwestycji (czyli odchylenia standardowego stopy zwrotu z tej inwestycji).

Historyczny wskaźnik Sharpe'a jest wielkością niemianowaną, liczoną za pomocą formuły

$$S = \frac{\bar{R} - \bar{\mu}_0}{\bar{\sigma}},$$

gdzie

- $\bar{\mu}_0$ jest historyczną stopą zwrotu pozbawioną ryzyka,
- $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ jest historyczną stopą zwrotu funduszu (bądź akcji), przy czym R_t to stopa zwrotu funduszu (akcji) w podokresie historycznym o numerze t ,
- $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}$ to historyczne ryzyko funduszu (bądź akcji).

W 1994 roku W.F.Sharpe zaproponował korektę używanego od 1966 roku wskaźnika. Zasugerował mianowicie uwzględnienie faktu, iż stopa zwrotu pozbawiona ryzyka również ulega w czasie zmianom.

Nowy, poprawiony historyczny wskaźnik Sharpe'a przybiera postać

$$S = \frac{\bar{R} - \bar{\mu}_0}{\sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [R_t - \mu_{0,t} - (\bar{R} - \bar{\mu}_0)]^2}}.$$

Widzimy więc, iż w mianowniku mamy estymator odchylenia standardowego różnicy między stopą zwrotu z funduszu (bądź akcji) a stopą zwrotu pozbawioną ryzyka. Oczywiście jeżeli stopa zwrotu pozbawiona ryzyka jest stała w czasie, to zachodzi równość $\mu_{0,t} = \bar{\mu}_0$ dla $t = 1, \dots, T$ i wówczas mianownik przyjmuje taką samą wartość, jak w oryginalnym wskaźniku Sharpe'a.

Wskaźnik Sharpe'a opisuje, jak dobrze osiągnięta stopa zwrotu „wynagradza” inwestora za podjęte przez niego ryzyko inwestowania w walory ryzykowne.

Jeżeli porównywalibyśmy dwa fundusze o takich samych stopach zwrotu, to fundusz o wyższym wskaźniku Sharpe'a miałby mniejsze ryzyko. Jeżeli zaś dwa fundusze miałyby równe ryzyka, to fundusz o większym wskaźniku Sharpe'a miałby wyższą stopę zwrotu. Wynika stąd kryterium inwestycyjne, polegające na maksymalizacji wskaźnika Sharpe'a – w myśl niego inwestorzy powinni wybierać fundusze inwestycyjne (akcje, portfele akcji) o możliwie najwyższym wskaźniku Sharpe'a.

Współczynnik beta

Współczynnik beta akcji (funduszu, portfela akcji) jest miarą zmienności tej akcji (funduszu) odniesioną do reszty rynku. Inaczej mówiąc, jest to miara ryzyka związana z daną akcją (funduszem). Jest to współczynnik informujący, z jaką siłą stopy zwrotu akcji (funduszu) reagują na stopy zwrotu wybranego indeksu charakteryzującego rynek jako całość, bądź wybrany sektor rynku (najczęściej wybiera się do tego celu indeks WIG, bądź WIG20, ale można też, np. w zależności od akcji danej spółki, stosować inne indeksy, np. indeksy branżowe). W przypadku większości funduszy współczynnik ten zawiera się w przedziale od zera do jedynki. Współczynnik bliski jedności sugeruje, że wahania wartości jednostki uczestnictwa są zbliżone do zmian wybranego indeksu. W przypadku funduszy papierów wierzycielskich beta oscyluje wokół zera. W przypadku funduszy agresywnych - jedności.

Jeżeli współczynnik beta danej akcji jest większy niż 1, to stopa zwrotu tej akcji wzrasta (lub spada) w przybliżeniu o więcej, niż stopa zwrotu czynnika objaśniającego – indeksu giełdowego (jest to tzw. *walor agresywny*). Zatem należy ten walor posiadać w czasie dobrej koniunktury i nie należy go posiadać w czasie złej koniunktury.

Jeżeli współczynnik beta danej akcji jest ułamkiem w przedziału $(0, 1)$, to stopa zwrotu tej akcji wzrasta (lub spada) w przybliżeniu o mniej niż stopa zwrotu czynnika objaśniającego (jest to tzw. *walor defensywny*). Zatem tego waloru nie należy posiadać w czasie dobrej koniunktury i można ewentualnie posiadać w czasie złej koniunktury.

Jeżeli współczynnik beta danej akcji jest liczbą ujemną, to stopa zwrotu tej akcji spada (rośnie), gdy stopa zwrotu (zmian) indeksu wzrasta (spada). Zatem ten walor należy posiadać w czasie złej koniunktury i nie należy go posiadać w czasie koniunktury dobrej.

Historyczny współczynnik beta akcji (funduszu) względem stopy zmian ustalonego indeksu wyznaczany jest z dowolnego ze wzorów

$$\bar{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})(F_t - \bar{F})}{\sum_{t=1}^T (F_t - \bar{F})^2} = \frac{\sum_{t=1}^T R_t F_t - T \bar{R} \bar{F}}{\sum_{t=1}^T F_t^2 - T (\bar{F})^2},$$

gdzie

- $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ jest historyczną stopą zwrotu akcji (bądź funduszu), przy czym R_t to stopa zwrotu akcji (funduszu) w podokresie historycznym o numerze t ,
- $\bar{F} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t$ jest historyczną stopą zwrotu (zmian) odpowiedniego indeksu, przy czym F_t , $t = 1, \dots, T$ to stopa zwrotu (zmian) wybranego indeksu w podokresie historycznym o numerze t (wszystkie F_t nie mogą być sobie równe!).

Zwykle przy estymacji współczynników beta wybiera się tygodniowe lub miesięczne podokresy historyczne dla pięcioletniego okresu historycznego.

Zauważmy, że przy tym podejściu przykładamy jednakową wagę do wszystkich podokresów historycznych. Jeżeli jednak chcielibyśmy większą wagę przykładać do podokresów historycznych mniej odległych w czasie, to możemy zastosować estymator historycznego współczynnika beta, uzyskany za pomocą tzw. *wygładzania wykładniczego*.

Niech $\lambda \in (0, 1)$ będzie dowolną stałą. Przyjmujemy wówczas wagi

$$p_t = \frac{\lambda^{T-t}}{\lambda^T + \dots + \lambda + 1} \text{ dla } t = 0, 1, \dots, T.$$

Wówczas historyczny współczynnik beta wyznaczamy ze wzoru:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=0}^T p_t (R_t - \hat{R})(F_t - \hat{F})}{\sum_{t=0}^T p_t (F_t - \hat{F})^2},$$

gdzie

$$\hat{F} = \sum_{t=0}^T p_t F_t, \quad \hat{R} = \sum_{t=0}^T p_t R_t.$$

Wskaźnik Treynora

Wskaźnik Treynora (Treynor ratio, Treynor index) został wprowadzony w 1965r. przez Jacka Treynora - matematyka i ekonomistę amerykańskiego. Jest to jedna z miar efektywności w zarządzaniu (*performance measure*). Wskaźnik Treynora jest wskaźnikiem ex-post (historycznym). Jest to historyczna premia za ryzyko inwestowania w akcję (fundusz), odniesiona do historycznego współczynnika beta tej akcji (funduszu) liczonego względem odpowiedniego indeksu. Wskaźnik Treynora, w odróżnieniu od wskaźnika Sharpe'a, jako miarę ryzyka wykorzystuje współczynnik beta.

Do wyznaczenia wartości tego wskaźnika zwykle wybierany jest indeks, charakteryzujący rynek, jako całość (WIG, bądź WIG20), ale można też, np. w zależności od akcji danej spółki, stosować inne indeksy, np. indeksy branżowe.

Historyczny wskaźnik Treynora jest wielkością wyrażoną w procentach, liczoną za pomocą formuły

$$T = \frac{\bar{R} - \bar{\mu}_0}{\bar{\beta}},$$

gdzie

- $\bar{\mu}_0$ jest historyczną stopą zwrotu pozbawioną ryzyka,
- $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ jest historyczną stopą zwrotu akcji (bądź funduszu), przy czym R_t to stopa zwrotu akcji (funduszu) w podokresie historycznym o numerze t ,
- $\bar{\beta}$ to historyczny współczynnik beta akcji (funduszu) względem stopy zmian F ustalonego indeksu.

W celu stwierdzenia czy fundusz osiągnął wynik lepszy od rynku należy porównać wskaźnik Treynora obliczony dla interesującego nas funduszu (akcji, portfela akcji) ze wskaźnikiem obliczonym dla reprezentanta portfela rynkowego (np. dla indeksu WIG lub WIG20). Jeżeli obliczona wartość wskaźnika jest wyższa od tej otrzymanej dla portfela rynkowego oznacza to, że fundusz uzyskał wyniki lepsze od rynku przy uwzględnieniu ryzyka.

Ujemna wartość wskaźnika Treynora oznacza, że dany fundusz (akcja) osiąga stopę zwrotu niższą od stopy pozbawionej ryzyka (o ile współczynnik beta tego funduszu bądź akcji jest dodatni – w przeciwnym wypadku sytuacja jest odwrotna).

Można też powiedzieć, że wskaźnik Treynora porównuje zysk z inwestycji ze statystycznym zachowaniem się akcji. W przypadku porównywania więc różnych inwestycji (funduszy, akcji) oznacza to, że za lepszą uznaje się inwestycję, która ma wyższą wartość wskaźnika Treynora.

Wskaźnik Treynora nie jest podawany dla funduszy papierów wierzycielskich (gdyż wówczas współczynnik beta, czyli mianownik wskaźnika Treynora, jest bliski zeru).

Wskaźnik Jensena

Wskaźnik Jensena (Jensen alpha, Jensen Index, Jensen differential return measure) został wprowadzony w 1968r. przez Michaela C. Jensena – ekonomistę amerykańskiego, późniejszego założyciela Journal of Financial Economics. Wskaźnik ten stanowi porównanie wyników funduszu z inwestycją pasywną w indeks stabilizowaną walorem pozbawionym ryzyka.

Historyczny wskaźnik Jensena jest wielkością wyrażoną w procentach, liczoną za pomocą formuły

$$J = \bar{R} - \left(\bar{\mu}_0 + \bar{\beta}(\bar{F} - \bar{\mu}_0) \right),$$

gdzie

- $\bar{\mu}_0$ jest historyczną stopą zwrotu pozbawioną ryzyka,
- $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ jest historyczną stopą zwrotu akcji (bądź funduszu), przy czym R_t to stopa zwrotu akcji (funduszu) w podokresie historycznym o numerze t ,
- $\bar{F} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t$ jest historyczną stopą zwrotu (zmian) odpowiedniego indeksu, przy czym F_t , $t = 1, \dots, T$ to stopa zwrotu (zmian) wybranego indeksu w podokresie historycznym o numerze t (wszystkie F_t nie mogą być sobie równe!),
- $\bar{\beta}$ to historyczny współczynnik beta akcji (funduszu) względem stopy zmian F ustalonego indeksu.

Wskaźnik Jensena jest odchyleniem przeciętnej stopy zwrotu portfela od teoretycznej stopy zwrotu wyznaczonej zgodnie z modelem CAPM wyceny aktywów kapitałowych (patrz: Prognozowanie stopy zwrotu z posiadanego portfela przy założeniu CAPM). Jeżeli w rozpatrywanym przedziale czasu mamy $J > 0$, to portfel funduszu znajduje się powyżej linii rynku papierów wartościowych (*security market line*, *SML*), co jest oznaką dobrej efektywności zarządzania tym portfelem. Jeżeli $J < 0$, wtedy rozpatrywany portfel znajduje się poniżej linii rynku papierów wartościowych, co świadczy o słabej efektywności zarządzania rozpatrywanym portfelem.

Wartości wskaźnika Jensena pozwalają na ułożenie rankingu wyników z najwyższymi wartościami, odpowiadającymi najlepszemu wynikowi funduszy (portfeli akcji, akcji).

Można podać następującą interpretację ekonomiczną wskaźnika Jensena:

Utwórzmy portfel składający się z dwóch części – pierwszej, reprezentującej rynek, czyli wybrany indeks (stopa zwrotu z tej części wynosi \bar{F}), zaś drugiej reprezentującej walor bezryzykowny (stopa zwrotu z tej części wynosi $\bar{\mu}_0$). Niech udział pierwszej części w portfelu wynosi β , zaś udział drugiej części: $1 - \beta$. Wówczas stopa zwrotu z takiego portfela wynosiłaby

$$\beta \bar{F} + (1 - \beta) \bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_0 + \beta(\bar{F} - \bar{\mu}_0).$$

Taki portfel możemy więc traktować, jako inwestycję „w rynek”, zbalansowaną inwestycją w walor bezryzykowny.

Warto zauważyć, że współczynnik beta tego portfela wynosi

$$\beta \cdot \beta_{rynek} + (1 - \beta) \cdot \beta_{bezryzyk} = \beta \cdot 1 + (1 - \beta) \cdot 0 = \beta.$$

Wskaźnik Jensena zatem stanowi porównanie wyników funduszu z inwestycją pasywną oraz inwestycją w rynek, stabilizowaną walorem pozbawionym ryzyka.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, iż wskaźnik Jensena nie relatywizuje uzyskanego przez fundusz efektu, ani względem ryzyka systematycznego, ani względem ryzyka całkowitego. Jest miarą absolutną (różnicą). Dwa portfele mogą leżeć w tej samej odległości od linii papierów wartościowych, jednakże charakteryzować się różnymi poziomami ryzyka. Dlatego też należy korzystać ostrożnie z tego wskaźnika i zaleca się w związku z tym dla celów klasyfikacji wartość wskaźnika Jensena podzielić przez wartość współczynnika beta i dopiero wykonywać porównanie.

Przyjmuje się, że okres historyczny, na podstawie którego wykonuje się estymację historycznego wskaźnika Jensena powinien być odpowiednio długi, minimalnie roczny, ale lepiej jest, jeśli jest to okres co najmniej 3-letni.

Wskaźnik Modiglianich

Wskaźnik Modiglianich (Modigliani–Modigliani Ratio, Modigliani Index; M^2 Index) został wprowadzony w 1997r. przez Franco Modiglianiego – ekonomistę amerykańskiego urodzonego we Włoszech (laureata nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii w 1985r.) oraz jego wnuczkę – Leah Modigliani. Chociaż opisany wiele lat wcześniej wskaźnik Sharpe’a cieszy się w środowisku akademickim oraz w wielu instytucjach dużą popularnością, nie jest wciąż dobrze znany ogółowi inwestorów. Zaproponowany przez Modiglianich wskaźnik stanowi porównanie wyników funduszu z inwestycją pasywną w indeks stabilizowaną walorem pozbawionym ryzyka. Jest to różnica w punktach procentowych pomiędzy zrealizowaną stopą zwrotu a stopą zwrotu uzyskaną z portfela rynkowego skorygowanego o poziom ryzyka. Warto zauważyć, że rankingi stworzone według wskaźników Sharpe’a i Modiglianich są identyczne; jednak ponieważ wskaźnik Modiglianich jest wielkością wyrażoną w procentach, uważa się, że może być ona bardziej "przyjazna" dla inwestorów.

Historyczny wskaźnik Modiglianich wyznacza się za pomocą formuły

$$M^2 = \bar{\mu}_0 - \bar{F} + \frac{\bar{R} - \bar{\mu}_0}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_F,$$

gdzie

- $\bar{\mu}_0$ jest historyczną stopą zwrotu pozbawioną ryzyka,
- $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ jest historyczną stopą zwrotu funduszu (bądź akcji), przy czym R_t to stopa zwrotu funduszu (akcji) w podokresie historycznym o numerze t ,
- $\bar{F} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t$ jest historyczną stopą zwrotu (zmian) odpowiedniego indeksu, przy czym F_t , $t = 1, \dots, T$ to stopa zwrotu (zmian) wybranego indeksu w podokresie historycznym o numerze t ,
- $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}$ to historyczne ryzyko funduszu (akcji),
- $\sigma_F = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (F_t - \bar{F})^2}$ to historyczne ryzyko portfela odtwarzającego indeks F (czyli historyczne ryzyko rynkowe).

Interpretacja ekonomiczna tego wskaźnika jest następująca: Jeżeli skonstruujemy portfel składający się z walorów z portfela interesującego nas funduszu oraz dodatkowo z waloru bezryzykowego dobranych w takiej proporcji, aby ryzyko naszego portfela było równe ryzyku rynkowemu (ryzyku wybranego indeksu), to wskaźnik Modiglianich będzie równy zrealizowanej stopie zwrotu z naszego portfela, pomniejszonej o historyczną stopę zwrotu z indeksu.

Jeżeli przez S oznaczymy wskaźnik Sharpe’a funduszu (akcji), to wskaźnik Modiglianich możemy zapisać w uproszczonej postaci:

$$M^2 = \bar{\mu}_0 - \bar{F} + S \cdot \sigma_F,$$

skąd widać, że wskaźnik Modiglianich jest związany ze wskaźnikiem Sharpe’a prostą zależnością liniową. Zatem rzeczywiście, jak już wcześniej wspomnieliśmy, rankingi według wskaźników Sharpe’a i Modiglianich są takie same. Jednak wskaźnik Sharpe’a jest wyrażony w dość abstrakcyjnych jednostkach (jednostki stopy zwrotu na jednostki ryzyka), podczas gdy wskaźnik Modiglianich wyrażony jest w punktach procentowych (jest to zwykła stopa zwrotu portfela funduszu „poprawionego” w taki sposób, by jego ryzyko było takie jak ryzyko portfela rynkowego), co powinno czynić go bardziej zrozumiałym dla inwestorów.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że w niektórych opracowaniach można również spotkać nieco inną definicję wskaźnika Modiglianich, mianowicie

$$M^2 = \bar{\mu}_0 + \frac{\bar{R} - \bar{\mu}_0}{\bar{\sigma}} \cdot \sigma_F,$$

gdzie nie odejmujemy dodatkowo historycznej stopy zwrotu \bar{F} z indeksu.

Wskaźnik Sortino

Wskaźnik Sortino został oficjalnie wprowadzony w roku 1994 (wówczas jeszcze nie nazywano go w ten sposób) przez Franka Sortino i Lee N.Price'a. Pierwsze pomysły używania tego rodzaju wskaźników pojawiły się jednak znacznie wcześniej („Financial Executive Magazine”, sierpień 1980r., „Journal of Risk Management”, wrzesień 1981r.).

Jest to modyfikacja wskaźnika Sharpe'a - zamiast stopy zwrotu wolnej od ryzyka używa się minimalnej akceptowanej przez inwestora stopy zwrotu, zaś zamiast odchylenia standardowego - semiodchylenia standardowego (które uwzględnia tylko odchylenia in minus od minimalnej wymaganej stopy zwrotu).

Przypomnijmy, że historyczne ryzyko funduszu (bądź akcji) rozumiane jako odchylenie standardowe liczyliśmy dotychczas ze wzoru

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}.$$

Warto zwrócić uwagę, że tak rozumiane ryzyko było tym większe, im większe były *jakiegokolwiek* odchylenia od przeciętnej stopy zwrotu. Jednak dla inwestorów (rozumianych jako nabywców akcji) niebezpieczne są jedynie odchylenia w dół (odchylenia w górę są korzystne). Dlatego rozsądnym wydaje się pomysł, aby przy wyznaczaniu ryzyka uwzględniać jedynie odchylenia poniżej średniej stopy zwrotu (bądź ogólnie odchylenia poniżej pewnego ustalonego poziomu).

Jeżeli przez r oznaczymy minimalną wymaganą stopę zwrotu, to historyczne ryzyko, rozumiane jako semiodchylenie standardowe, wyznaczmy ze wzoru

$$\bar{\theta}(r) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_t - r)^-]^2},$$

$$\text{gdzie } (R_t - r)^- = \begin{cases} R_t - r & \text{gdy } R_t - r < 0 \\ 0 & \text{gdy } R_t - r \geq 0 \end{cases}$$

Widzimy, że wyrażenie $(R_t - r)^-$ uwzględnia właśnie jedynie odchylenia w dół od wymaganej minimalnej stopy zwrotu. O ile odchylenie $R_t - r$ jest dodatnie, wyrażenie to przyjmuje wartość 0 i takiej wielkości nie dolicza się do ryzyka.

Historyczny wskaźnik Sortino można więc wyznaczyć ze wzoru

$$Sort = \frac{\bar{R} - r}{\bar{\theta}(r)},$$

gdzie

- $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$ jest historyczną stopą zwrotu funduszu (bądź akcji), przy czym R_t to stopa zwrotu funduszu (akcji) w podokresie historycznym o numerze t ,
- r jest minimalną wymaganą przez inwestora stopą zwrotu (*minimum acceptable return, MAR*); za r niektórzy radzą przyjęcie poziomu 0, czasem przyjmuje się historyczną stopę zwrotu pozbawioną ryzyka $\bar{\mu}_0$, jednak w swojej pracy z 1994 roku Sortino i Price sugerują przyjęcie za r stopy zwrotu z portfela rynkowego (reprezentującego wybrany indeks),
- $\bar{\theta}(r) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_t - r)^-]^2}$ to historyczne ryzyko funduszu (bądź akcji).

Uwaga: Z formalnego punktu widzenia historyczne semiodchylenie standardowe to wielkość

$$\bar{\theta} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [(R_t - \bar{R})^-]^2},$$

czyli odchylenie od średniej historycznej stopy zwrotu. Często jednak nazywa się tak odchylenia od dowolnego ustalonego poziomu i my przyjmujemy również taką konwencję.

Historyczna stopa zwrotu

Załóżmy, że interesujący nas okres historyczny dzieli się na T podokresów historycznych równej długości (np. okres dwóch miesięcy dzieli się na 8 tygodniowych podokresów historycznych). **Jednookresową stopą zwrotu** (np. tygodniową, miesięczną, itp.) z inwestycji w daną akcję (fundusz) w tym okresie nazywa się stosunek zysku (może on być ujemny!) z zakupu tej akcji (jednostek uczestnictwa funduszu) do początkowego kursu (zakładamy że kursy akcji uwzględniają już ewentualne wypłacane dywidendy). Jeżeli więc na początku ustalonego podokresu historycznego o numerze $t \in \{1, \dots, T\}$ (tygodnia, miesiąca, itp.) dana akcja miała notowanie C_p (bądź jest to cena jednostki uczestnictwa w funduszu), zaś na końcu notowanie (cenę jednostki uczestnictwa) C_k , to stopa zwrotu w tym podokresie historycznym jest równa

$$R_t = \frac{C_k - C_p}{C_p}.$$

Warto zauważyć, że stopa zwrotu może być wielkością dowolnie wielką, jednak najmniejszą jej wartością jest -1 , co odpowiada sytuacji, gdy notowanie C_k na końcu interesującego nas okresu wyniesie 0, czyli gdy stracimy wszystkie zainwestowane pieniądze.

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy wyznaczonych T stóp zwrotu, wynoszących kolejno R_1, R_2, \dots, R_T , to historyczną (jednookresową) stopę zwrotu (czasem nazywa się ją **prostą stopą zwrotu**, albo również **oczekiwaną stopą zwrotu**) z inwestycji w tym okresie liczymy ze wzoru

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t,$$

czyli jest to zwykła średnia arytmetyczna poszczególnych stóp zwrotu.

Jeżeli na przykład interesuje nas historyczna tygodniowa stopa zwrotu akcji pewnej spółki, wyznaczona na podstawie danych z ostatnich dwóch miesięcy, to będzie ona wynosiła

$$\bar{R} = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 R_t,$$

gdzie R_1, R_2, \dots, R_8 to stopy zwrotu akcji w kolejnych podokresach historycznych (czyli w tym wypadku w kolejnych tygodniach).

Oczywiście im wyższa jest historyczna stopa zwrotu danej akcji (funduszu), tym korzystniejszy wydaje się zakup tej akcji, bądź jednostek uczestnictwa w funduszu. Należy pamiętać jednak, że przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych warto oprócz samych stóp zwrotu uwzględnić również i ryzyko, jakie wiąże się z możliwymi wahaniami cen akcji (jednostek uczestnictwa w funduszu).

Oprócz prostej stopy zwrotu, omówionej powyżej, wykorzystywane jest także w praktyce drugie podejście, mianowicie tzw. logarytmiczna stopa zwrotu. Odpowiada ona kapitalizacji ciągłej, co jest bardziej zgodne z zasadami inwestowania, gdyż po sprzedaży danego instrumentu uzyskane środki finansowe mogą być niemal natychmiast inwestowane w inne instrumenty.

Jeżeli na początku ustalonego podokresu historycznego o numerze $t \in \{1, \dots, T\}$ (tygodnia, miesiąca, itp.) dana akcja miała notowanie C_p (bądź jest to cena jednostki uczestnictwa w funduszu), zaś na końcu notowanie (cenę jednostki uczestnictwa) C_k , to **jednookresowa logarytmiczna stopa zwrotu** w tym podokresie historycznym jest równa

$$R_t = \ln \frac{C_k}{C_p}.$$

Warto zauważyć, że logarytmiczna stopa zwrotu może być wielkością dowolnie dużą, ale (w odróżnieniu od prostej stopy zwrotu) i dowolnie małą, bowiem gdyby notowanie C_k na końcu interesującego nas okresu zbliżało się 0, czyli gdybyśmy stracili niemal wszystkie zainwestowane pieniądze, to logarytmiczna stopa zwrotu będzie zbliżała się do $-\infty$.

Ponadto logarytmiczna stopa zwrotu jest wielkością addytywną, co między innymi ułatwia jej wyznaczanie. Jeżeli bowiem mamy wyznaczone jednookresowe logarytmiczne stopy zwrotu R_1, R_2, \dots, R_T za okresy $[1, 2]$, $[2, 3]$, \dots , $[T-1, T]$, to aby wyznaczyć wielkość jednookresowej logarytmicznej stopy zwrotu za okres $[1, T]$ wystarczy obliczyć sumę logarytmicznych jednookresowych

stóp zwrotu za okresy $[1, 2], [2, 3], \dots, [T-1, T]$. Rzeczywiście, zachodzi równość:

$$\ln \frac{C_2}{C_1} + \ln \frac{C_3}{C_2} + \dots + \ln \frac{C_T}{C_{T-1}} = \ln \left(\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_3}{C_2} \cdot \dots \cdot \frac{C_T}{C_{T-1}} \right) = \ln \frac{C_T}{C_1}.$$

Warto jeszcze odnotować fakt, iż logarytmiczna stopa zwrotu jest nie większa od prostej stopy zwrotu za ten sam okres. Wynika to z nierówności

$$\ln(1+x) \leq x, \quad (*)$$

zachodzącej dla dowolnych $x > -1$.

Logarytmiczna stopa zwrotu może być bowiem zapisana w postaci

$$\ln \frac{C_k}{C_p} = \ln \left(1 + \frac{C_k - C_p}{C_p} \right)$$

i po skorzystaniu z nierówności (*) dla $x = \frac{C_k - C_p}{C_p}$ dostajemy:

$$\ln \left(1 + \frac{C_k - C_p}{C_p} \right) \leq \frac{C_k - C_p}{C_p},$$

a prawa strona powyższej nierówności równa jest właśnie jednookresowej prostej stopie zwrotu.

Historyczne ryzyko

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy wyznaczonych T stóp zwrotu akcji bądź funduszu w kolejnych podokresach historycznych, wynoszących kolejno R_1, R_2, \dots, R_T , to historyczną stopę zwrotu z inwestycji w daną akcję (fundusz) w tym okresie wyznaczamy ze wzoru

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t.$$

Historyczne ryzyko (rozumiane jako odchylenie standardowe stóp zwrotu) wyznaczamy wówczas ze wzoru

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \cdot \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}.$$

Za bardziej ryzykowny uznamy bowiem ten walor, który wykazywał w przeszłości większe wahania, gdyż występuje wówczas większe niebezpieczeństwo, że również i w przyszłości zmieni on gwałtownie swą wartość na niekorzyść inwestora. Odchylenie standardowe jest zaś jedną z miar rozrzutu (rozproszenia) i przyjmuje wartość tym większą, im większe były w przeszłości odchylenia stóp zwrotu od średniej historycznej stopy zwrotu.

Dla nabywcy akcji (jednostek uczestnictwa w funduszu) korzystniejszy będzie zatem wybór waloru charakteryzującego się niższymi wahaniami w przeszłości, czyli niższym poziomem ryzyka. Niestety często wiąże się to jednak z niższą stopą zwrotu. Ważne jest więc dokonanie wyboru, który pogodzi chęć maksymalizowania stopy zwrotu przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka. W wyborze tym mogą pomóc bardziej złożone wskaźniki, charakteryzujące dany walor, np. wskaźnik Treynora, wskaźnik Sharpe'a, wskaźnik Jensena, itp.

Stopa zwrotu i ryzyko portfela

Jeżeli inwestor posiada n walorów ryzykownych, to portfel \mathbf{x} inwestora w sensie procentowo-wartościowym (albo udziałowym) można opisać w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

gdzie x_i oznacza udział i -tego waloru w portfelu, czyli jest to stosunek wartości danego waloru do wartości całego portfela. Na przykład jeżeli inwestor posiada kwotę L , za którą kupił akcje n spółek, to

$$x_i = \frac{K_i}{L},$$

gdzie K_i jest kwotą przeznaczoną na zakup akcji i -tej ze spółek, czyli jest to kwota

$$K_i = m_i \cdot C_{i,p},$$

gdzie $C_{i,p}$ jest ceną początkową (w momencie zakupu) jednej akcji, zaś m_i ilością sztuk akcji i -tej spółki, zakupionych przez inwestora ($i = 1, \dots, n$).

Portfel musi składać się z liczb nieujemnych. Jeżeli zaś któreś spośród x_i jest równe zeru, oznacza to, że inwestor nie zakupił w ogóle danego waloru.

Portfel musi się składać także z liczb nie większych, niż jeden. Jeżeli któreś z x_i jest równe 1, oznacza to, że inwestor za cały swój kapitał nabył akcje tylko i -tej spółki (wówczas pozostałe udziały muszą już być zerowe).

Zakładamy, że łączna kwota wydana przez inwestora na zakup n akcji wynosi L (czyli $K_1 + \dots + K_n = L$), zatem portfel musi składać się też z liczb sumujących się do jedynki:

$$x_1 + \dots + x_n = \frac{K_1}{L} + \dots + \frac{K_n}{L} = \frac{K_1 + \dots + K_n}{L} = \frac{L}{L} = 1.$$

Wiadomo (patrz: Historyczna stopa zwrotu), że stopa zwrotu i -tej akcji jest dana wzorem

$$R_i = \frac{C_{k,i} - C_{p,i}}{C_{p,i}},$$

gdzie $C_{p,i}$ oznacza notowanie (cenę) i -tej akcji na początku ustalonego okresu inwestycyjnego, zaś $C_{k,i}$ oznacza jej notowanie na końcu.

Przez stopę zwrotu z portfela \mathbf{x} rozumiemy stosunek zysku inwestora posiadającego dany portfel do kwoty zainwestowanej w ten portfel na początku.

Założmy, że inwestor za posiadaną kwotę L zakupuje ilości m_1, \dots, m_n kolejnych walorów. Zatem zysk z i -tego waloru można opisać wzorem

$$(C_{k,i} - C_{p,i}) \cdot m_i$$

(jest to zysk z zakupu jednej akcji pomnożony przez ilość zakupionych akcji). Stąd stopa zwrotu z portfela opisana jest wzorem

$$\frac{(C_{k,1} - C_{p,1}) \cdot m_1 + \dots + (C_{k,n} - C_{p,n}) \cdot m_n}{L}$$

(jest to łączny zysk z zakupu wszystkich akcji z portfela podzielony przez całą zainwestowaną w te akcje kwotę).

Przekształćmy ten wzór przy użyciu wcześniej podanych związków:

$$\begin{aligned} \frac{(C_{k,1} - C_{p,1}) \cdot m_1 + \dots + (C_{k,n} - C_{p,n}) \cdot m_n}{L} &= \frac{R_1 \cdot m_1 \cdot C_{p,1} + \dots + R_n \cdot m_n \cdot C_{p,n}}{L} \\ &= R_1 \cdot \frac{m_1 \cdot C_{p,1}}{L} + \dots + R_n \cdot \frac{m_n \cdot C_{p,n}}{L} = R_1 \cdot x_1 + \dots + R_n \cdot x_n. \end{aligned}$$

Dostajemy zatem ostatecznie formułę, opisującą **stopę zwrotu z portfela** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\bar{R}_{\mathbf{x}} = R_1 \cdot x_1 + \dots + R_n \cdot x_n.$$

Widzimy stąd więc, że stopa zwrotu z portfela \mathbf{x} może być również rozumiana, jako średnia ważona stóp zwrotu poszczególnych walorów ryzykownych, przy czym wagami są udziały tych walorów w portfelu. Opis ten często jest przyjmowany za definicję stopy zwrotu z portfela.

Przy użyciu nieco bardziej skomplikowanego rozumowania pokazuje się, że **ryzyko portfela**, rozumiane jako odchylenie standardowe stopy zwrotu tego portfela, opisane jest formułą

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i,j}},$$

gdzie $\sigma_{i,j}$ jest kowariancją stóp zwrotu walorów i -tego i j -tego. Historyczną kowariancję dla pary walorów wyznacza się ze wzoru

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i) \cdot (R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

gdzie $R_{i,t}$ oznacza stopę zwrotu i -tego waloru w podokresie historycznym o numerze t ($t = 1, \dots, T$), zaś \bar{R}_i jest średnią historyczną stopą zwrotu z i -tego waloru, wyznaczaną ze wzoru

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}.$$

Współczynnik beta portfela

Jeżeli inwestor posiada portfel w sensie udziałowym (procentowo-wartościowym)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

(patrz: stopa zwrotu i ryzyko portfela) oraz

$$\beta_1, \dots, \beta_n$$

są współczynnikami beta odpowiednich walorów ryzykownych (patrz: współczynnik beta), to **współczynnik beta portfela \mathbf{x}** wynosi

$$\beta_{\mathbf{x}} = \beta_1 \cdot x_1 + \dots + \beta_n \cdot x_n,$$

czyli jest to ważona udziałami w portfelu suma współczynników beta poszczególnych walorów.

Można wykazać, że zachodzi też następujący związek:

$$\beta_{\mathbf{x}} = \frac{Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}_m)}{\sigma^2(\mathbf{x}_m)},$$

oznaczający, iż współczynnik beta portfela jest stosunkiem kowariancji stopy zwrotu portfela \mathbf{x} ze stopą zwrotu portfela rynkowego \mathbf{x}_m i wariancji stopy zwrotu z portfela rynkowego. Innymi słowy, współczynnik beta portfela \mathbf{x} może być rozumiany, jako względna miara skorelowania rentowności portfela \mathbf{x} z rentownością rynku, odniesiona do kwadratu ryzyka inwestowania na rynku, jako całości.

Korzystając z tego związku pokazuje się, że w szczególności współczynnik beta portfela rynkowego wynosi 1.

Jeżeli współczynnik beta portfela \mathbf{x} jest większy od 1, to taki portfel nazywamy **portfelem agresywnym**. W tym przypadku oczekiwana stopa zwrotu tego portfela jest większa, niż oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego.

Jeżeli współczynnik beta portfela \mathbf{x} jest równy 1, to taki portfel nazywamy **portfelem neutralnym**. W tym przypadku oczekiwana stopa zwrotu tego portfela jest taka sama, jak stopa oczekiwana zwrotu portfela rynkowego.

Jeżeli współczynnik beta portfela \mathbf{x} jest mniejszy od 1, lecz dodatni, to taki portfel nazywamy **portfelem defensywnym**. W tym przypadku oczekiwana stopa zwrotu tego portfela jest mniejsza, niż oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego, lecz większa, niż stopa zwrotu waloru pozbawionego ryzyka.

Jeżeli współczynnik beta portfela \mathbf{x} jest równy 0, to taki portfel nie reaguje na zmiany rynku (czyli jest wolny od ryzyka rynku). W tym przypadku oczekiwana stopa zwrotu tego portfela jest równa stopie zwrotu waloru pozbawionego ryzyka (i mniejsza, niż oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego).

Jeżeli współczynnik beta portfela \mathbf{x} jest mniejszy niż 0, to taki portfel reaguje na zmiany odwrotnie, niż rynek. W tym przypadku oczekiwana stopa zwrotu tego portfela jest mniejsza, niż oczekiwana stopa zwrotu waloru pozbawionego ryzyka (i tym bardziej mniejsza, niż oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego).

Stopa zwrotu portfela rynkowego to inaczej przeciętna stopa zwrotu z rynku. Określa się ją dzięki wykorzystaniu indeksów giełdowych, charakteryzujących rynek jako całość (np. indeks WIG).

Jeżeli F_1, \dots, F_T są stopami zwrotu (zmian) wybranego indeksu w podokresach historycznych o numerach $1, \dots, T$, to oczekiwaną stopę zwrotu portfela rynkowego \mathbf{x}_m wyznacza się z zależności

$$E(\mathbf{x}_m) = \bar{F},$$

gdzie

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t$$

jest historyczną stopą zwrotu (zmian) wybranego indeksu.

Prognozowanie stopy zwrotu z posiadanego portfela przy założeniu CAPM

W latach 60-tych ubiegłego wieku matematycy i ekonomiści (pracujący niezależnie): J.L. Treynor, W.F. Sharpe, J. Lintner oraz później J. Mossin oraz E.F. Fama stworzyli tzw. Model Wyceny Aktywów Kapitałowych (*Capital Asset Pricing Model, CAPM*). Podstawą tego modelu w klasycznej jego wersji jest szereg (nie do końca spełnionych na rynku!) założeń. Najważniejsze z nich, to:

- nieskończona podzielność wszystkich walorów (inwestor może kupić bądź sprzedać dowolną, również ułamkową, ilość każdego waloru),
- brak podatków, kosztów transakcyjnych oraz inflacji,
- inwestorzy mogą krótko sprzedać każdy walor ryzykowny (akcję),
- istnieje możliwość udzielania i zaciągania nieograniczonego kredytu przy stopie pozbawionej ryzyka,
- konkurencyjność rynku: każdy inwestor akceptuje cenę ustaloną na rynku i przez kupno bądź sprzedaż nie może mieć wpływu na kształtowanie się cen instrumentów finansowych,
- inwestorzy mają ten sam horyzont inwestycyjny,
- inwestorzy mają jednorodne oczekiwania co do charakterystyk instrumentów finansowych (m.in. oczekiwanych stóp zwrotu i ryzyka) w danym okresie inwestycyjnym.

Okazuje się, że przy powyższych założeniach można udowodnić, że inwestorzy muszą dążyć do posiadania dobrze zdywersyfikowanych portfeli. W przypadku takich portfeli ryzyko jest opisane jedynie przez współczynnik beta. Zatem zależność dochodu z portfela od ryzyka tego portfela jest w zasadzie zależnością oczekiwanego stopa zwrotu z portfela od współczynnika beta tego portfela. Pokazuje się, że stopa zwrotu portfela inwestora musi być funkcją liniową stopa zwrotu portfela rynkowego (przy czym współczynnikiem kierunkowym tej funkcji jest właśnie współczynnik beta portfela inwestora). Ściślej mówiąc: jeżeli \mathbf{x} jest portfelem inwestora (w sensie procentowo-wartościowym), to oczekiwaną stopę zwrotu $\bar{R}_{\mathbf{x}}$ z portfela \mathbf{x} przy założeniach modelu CAPM prognozuje się za pomocą wzoru (jest to tzw. wzór na wycenę aktywów kapitałowych w modelu CAPM):

$$\bar{R}_{\mathbf{x}} = \mu_0 + \beta_{\mathbf{x}} \cdot (\bar{F} - \mu_0),$$

gdzie μ_0 jest stopą zwrotu pozbawioną ryzyka, $\beta_{\mathbf{x}}$ jest współczynnikiem beta portfela \mathbf{x} (patrz: Współczynnik beta portfela), zaś \bar{F} jest oczekiwaną stopą zwrotu portfela rynkowego (patrz: Współczynnik beta portfela).

Wzór na wycenę aktywów kapitałowych podaje wielkość oczekiwanej stopa zwrotu portfela w tzw. *stanie równowagi*, co oznacza, iż przy założeniu że rynek znajduje się w stanie równowagi portfele powinny w miarę upływu czasu dawać zwrot zgodny z równaniem wyceny. Dość często tak jednak nie jest. Wystąpić wtedy mogą dwa przypadki.

Jeżeli dany portfel ma oczekiwaną stopę zwrotu **niższą**, niż ta wynikająca z równania wyceny, to jest on dla inwestorów nieatrakcyjny. Będą się oni zatem starali dokonać jego sprzedaży (być może również krótkiej sprzedaży), w związku z czym zwiększy się podaż na ten portfel, co powinno zaowocować spadkiem jego ceny, a więc wzrośnie jego oczekiwana stopa zwrotu. W efekcie stopa zwrotu z tego portfela powinna stać się tą równowagową stopą zwrotu, wyznaczoną z równania wyceny. Taki portfel nazywamy portfelem **przeszacowanym** lub **przewartościowanym** i należy go jak najszybciej sprzedawać.

Jeżeli dany portfel ma oczekiwaną stopę zwrotu **wyższą**, niż ta wynikająca z równania wyceny, to jest on dla inwestorów atrakcyjny. Będą się oni zatem starali dokonać jego zakupu, w związku z czym zwiększy się popyt na ten portfel, co powinno zaowocować wzrostem jego ceny, a więc spadnie jego oczekiwana stopa zwrotu. W efekcie stopa zwrotu z tego portfela powinna stać się tą równowagową stopą zwrotu, wyznaczoną z równania wyceny. Taki portfel nazywamy portfelem **niedoszacowanym** lub **niedowartościowanym** i należy go jak najszybciej kupować.

Information Ratio i Tracking Error

Wskaźnik “Information Ratio”, zwany też czasem “Appraisal Ratio”, jest analogiem wskaźnika Sharpe’a, bazującym jednak na tzw. benchmarku – wybranym portfelu, który inwestor chce „pobić”, zamiast na stopie zwrotu wolnej od ryzyka.

Niech dany będzie okres historyczny, dzielący się na T podokresów historycznych równej długości, o numerach $1, 2, \dots, T$. **Wskaźnik Information Ratio** (jednookresowy) **portfela \mathbf{x}** wyznacza się wówczas ze wzoru

$$IR_{\mathbf{x}} = \frac{\bar{R}_{\mathbf{x}} - \bar{R}_b}{TE_{\mathbf{x}}}$$

gdzie

- $\bar{R}_{\mathbf{x}}$ jest stopą zwrotu z portfela \mathbf{x} (patrz: stopa zwrotu i ryzyko portfela),
- \bar{R}_b jest stopą zwrotu z wybranego przez inwestora benchmarku,
- $TE_{\mathbf{x}}$ to tzw. “tracking error” portfela \mathbf{x} względem benchmarku.

Tracking error portfela \mathbf{x} liczy się jako odchylenie standardowe różnicy stóp zwrotu z portfela \mathbf{x} i benchmarku, czyli jest to wyrażenie

$$TE_{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \cdot \sum_{t=1}^T (R_{\mathbf{x},t} - R_{b,t} - (\bar{R}_{\mathbf{x}} - \bar{R}_b))^2},$$

gdzie

- $R_{\mathbf{x},t}$ jest stopą zwrotu z portfela \mathbf{x} w podokresie historycznym o numerze t ,
- $R_{b,t}$ jest stopą zwrotu z benchmarku w podokresie historycznym o numerze t .

Wskaźnik Tracking Error pozwala na dokonanie oceny zgodności efektów zarządzania portfelem z wynikami osiąganymi przez benchmark. Im mniejsza jest wartość tego wskaźnika, tym lepsze jest odzwierciedlenie wyników benchmarku, czyli występuje większa zgodność.

Zauważmy, że wyrażenie $\bar{R}_{\mathbf{x}} - \bar{R}_b$ w liczniku Information Ratio odzwierciedla umiejętności tworzenia przez inwestora portfela o stopie zwrotu korzystniejszej, niż stopa zwrotu z portfela referencyjnego (benchmarku), z którym chce on konkurować (może być to np. wybrany indeks giełdowy). Z kolei tracking error w mianowniku mierzy ilość tzw. ryzyka resztowego (niesystematycznego), które inwestor napotyka przy próbie “pobicia” zwrotów z benchmarku. Jest to innymi słowy koszt aktywnego zarządzania, czyli wielkość losowych fluktuacji, na które inwestor nie ma wpływu i które mogą ewentualnie pogorszyć skutki podejmowanych decyzji inwestycyjnych.

- Wielkość wskaźnika Information Ratio z przedziału $0,5 - 0,75$ uważana jest za dobrą.
- Wielkość wskaźnika Information Ratio z przedziału $0,75 - 1$ uważana jest za bardzo dobrą.
- Wielkość wskaźnika Information Ratio powyżej 1 uważana jest wyjątkowo dobrą.

Warto jeszcze zauważyć, że w przypadku, gdy jako benchmark zostanie wybrany walor pozbawiony ryzyka (jego stopa zwrotu może się zmieniać w czasie!), to Information Ratio będzie równo uogólnionemu wskaźnikowi Sharpe’a (patrz: Wskaźnik Sharpe’a), zaś jeżeli ów walor pozbawiony ryzyka będzie miał stopę zwrotu stałą, wówczas wskaźnik Information Ratio będzie równy klasycznemu wskaźnikowi Sharpe’a.

Portfel minimalnego ryzyka, portfel relatywnie minimalnego ryzyka oraz portfel optymalny względem bezryzykowej stopy zwrotu

Założmy, że interesuje nas zakup akcji pewnej liczby (niech będzie to liczba n) spółek.

Na podstawie danych historycznych możemy wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu każdej z akcji. Robimy to w następujący sposób. Dzielimy interesujący nas okres historyczny na T podokresów historycznych o numerach $1, 2, \dots, T$. Dysponując notowaniem C_p danej akcji na początku pewnego podokresu o numerze $t \in \{1, \dots, T\}$ (tygodnia, miesiąca, itp.) oraz notowaniem C_k na końcu tego podokresu, wyznaczamy stopę zwrotu w tym podokresie historycznym ze wzoru

$$R_t = \frac{C_k - C_p}{C_p}.$$

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy wyznaczonych T stóp zwrotu, wynoszących kolejno R_1, R_2, \dots, R_T , to historyczną stopę zwrotu z inwestycji w tym okresie liczymy ze wzoru

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_T}{T},$$

czyli jest to średnia arytmetyczna poszczególnych stóp zwrotu.

Natomiast ryzyko wiążące się z wahaniami kursu danej akcji wyznaczamy ze wzoru

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1} \cdot \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}.$$

Teraz ponieważ inwestor chce zakupić akcje n spółek, to jego portfel \mathbf{x} (w sensie procentowo-wartościowym, albo inaczej udziałowym) można opisać w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

gdzie x_i oznacza udział i -tego waloru w portfelu, czyli jest to stosunek wartości danego waloru do wartości całego portfela.

Portfel musi składać się z liczb nieujemnych. Jeżeli zaś któreś spośród x_i jest równe zero, oznacza to, że inwestor nie zakupił w ogóle danego waloru.

Portfel musi się składać także z liczb nie większych, niż jeden. Jeżeli któreś z x_i jest równe 1, oznacza to, że inwestor za cały swój kapitał nabył akcje tylko i -tej spółki (wówczas pozostałe udziały muszą już być zerowe).

Jak zostało to już omówione (patrz: Stopa zwrotu i ryzyko portfela) stopa zwrotu z portfela $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ może być wyrażona wzorem

$$\bar{R}_{\mathbf{x}} = R_1 \cdot x_1 + \dots + R_n \cdot x_n.$$

Natomiast ryzyko portfela (rozumiane jako odchylenie standardowe stopy zwrotu tego portfela) opisane jest wzorem

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i,j}},$$

gdzie $\sigma_{i,j}$ jest kowariancją stóp zwrotu walorów i -tego i j -tego. Historyczną kowariancję dla pary walorów wyznacza się ze wzoru

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i) \cdot (R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

gdzie $R_{i,t}$ oznacza stopę zwrotu i -tego waloru w podokresie historycznym o numerze t ($t = 1, \dots, T$), zaś \bar{R}_i jest średnią historyczną stopą zwrotu z i -tego waloru, wyznaczaną ze wzoru

$$\bar{R}_i = \frac{R_{i,1} + R_{i,2} + \dots + R_{i,T}}{T}.$$

Widzimy, że dla różnych portfeli x będziemy otrzymywali różne stopy zwrotu oraz różne ryzyka. Okazuje się na przykład, iż jeżeli chcemy uzyskać pewną stopę zwrotu, to na ogół (jeśli mamy do dyspozycji akcje co najmniej trzech spółek) możemy ją uzyskać na wiele różnych sposobów. Jednak portfele, które dawać będą taką, a nie inną stopę zwrotu, charakteryzować się będą różnymi poziomami ryzyka. Najistotniejszym więc problemem jest tu znalezienie takich portfeli, które przy zadanej stopie zwrotu będą miały najmniejsze możliwe ryzyko (nie ma sensu decydować się na większe ryzyko, jeżeli średnio uzyskamy tyle samo). Portfele o tej własności tworzą tzw. **łamaną portfeli relatywnie minimalnego ryzyka**.

Okazuje się jednak, że wśród tych portfeli istnieją portfele „zbędne” — takie, które przy pewnym poziomie ryzyka mają niską stopę zwrotu, tzn. że istnieją portfele o takim samym ryzyku, ale wyższej stopie zwrotu. Te „lepsze” portfele nazywa się **portfelami efektywnymi**, a cały ich zbiór **łamaną portfeli efektywnych**.

Inwestorów powinno zatem interesować wyznaczenie wszystkich portfeli efektywnych. Istnieje kilka sposobów, aby ten cel osiągnąć. Wszystkie niestety są dość skomplikowane. Najszybszy z nich to tzw. algorytm prostej krytycznej (albo linii krytycznej) (ang. critical line algorithm), który w najszybszy sposób wyznacza po kolei wszystkie portfele efektywne.

Wśród portfeli efektywnych istnieje jeden (może być ich też więcej) portfel o najmniejszym ryzyku spośród ryzyk wszystkich istniejących portfeli. Nazywa się go **portfelem minimalnego ryzyka**. Jest on co prawda najstabilniejszy, „najpewniejszy” pod względem wahań w czasie, jednak na ogół ma bardzo niską stopę zwrotu i dlatego zwykle nie jest dla inwestorów interesujący.

Jeżeli znamy stopę zwrotu waloru bezryzykownego (np. obligacji), to może nam ona posłużyć do wyznaczenia jeszcze jednego typu portfela. Taki portfel (o ile istnieje, to w praktyce jest już jedyny) ma tę własność, że obliczony dla niego wskaźnik Sharpe’a ma wartość największą z możliwych spośród wskaźników Sharpe’a wszystkich portfeli. Jest to tzw. **portfel optymalny względem bezryzykownej stopy zwrotu**. Jak wiadomo (patrz: Wskaźnik Sharpe’a) im większa wartość wskaźnika Sharpe’a, tym lepszy jest to sygnał wyższej jakości danego portfela akcji. Jeżeli więc za kryterium wyboru portfeli przyjęlibyśmy maksymalizację wskaźnika Sharpe’a, wówczas portfel optymalny względem bezryzykownej stopy zwrotu jest portfelem najlepszym. Ma on co prawda ryzyko większe, niż ryzyko minimalne, ale jego stopa zwrotu jest zwykle dużo wyższa od stopy zwrotu portfela minimalnego ryzyka. Ten portfel zatem może być już dla inwestorów atrakcyjny.